

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі және қасиеттері

Мына шарттарды: 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үштік (құрайды) құрауы керек қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп атаймыз. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ немесе $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$.

№1. $\vec{a}(3; -1; -2)$, $\vec{b}(1; 2; -1)$ векторлары берілген.

Табу керек: а) $\vec{a} \times \vec{b} = ?$; б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = ?$; в) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}) = ?$

Шешуі: а) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 6\vec{k} - 2\vec{j} + \vec{k} + 4\vec{i} + 3\vec{j} =$

$$= 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} = \vec{c}(5; 1; 7)$$

бұл жерде $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ анықтауыш Саррюс ережесі бойынша есептелінді.

б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} = (6; -2; -4) \times (1; 2; -1) + \vec{0} = ?$

$$2\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 12\vec{k} - 4\vec{j} + 2\vec{k} + 8\vec{i} + 6\vec{j} = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 14\vec{k} = \vec{c}(10; 2; 14)$$

Жауабы: $(10; 2; 14)$, $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$ екендігі қасиеті бойынша ескеріледі.

в) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times 2\vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = 4(\vec{a} \times \vec{a}) + 2(\vec{a} \times \vec{b}) +$

$$+ 2(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{b}) = 0 + 4(\vec{a} \times \vec{b}) - 0 = 4(\vec{a} \times \vec{b}) = ?$$

$$4(\vec{a} \times \vec{b}) = 4 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (\vec{i} + 6\vec{k} - 2\vec{j} + \vec{k} + 4\vec{i} + 3\vec{j}) = 4 \cdot (5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}) =$$
$$= (20; 4; 28).$$

Бұл жерде $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$; $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ және $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ қасиеттері қолданыста болды.

№2. $\vec{a}(2; 1; 0)$, $\vec{b}(1; -3; 4)$ векторлары берілген.

Есепте: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ?$ Ол үшін, алдымен $\vec{a} \times \vec{b} = ?$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{k} + 0\vec{j} - \vec{k} - 0\vec{i} - 8\vec{j} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 7\vec{k} = \vec{c}(4; -8; -7)$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{16 + 64 + 49} = \sqrt{129}$$

№3. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр, $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$.

Есепте: а) $|\vec{a} \times \vec{b}| = ?$, б) $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = ?$, в) $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})| = ?$

Шешуі: а) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 3 \cdot 4 \cdot \sin(90^\circ) = 12 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12$,

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$, себебі $(\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 90^\circ = \varphi)$ олар $\vec{a} \perp \vec{b}$

б) $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = 0 + \vec{b} \times \vec{a} - 0 = 2(\vec{b} \times \vec{a})$

$|2(\vec{b} \times \vec{a})| = ?$; $|2(\vec{b} \times \vec{a})| = 2|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24$.

в) $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} - 6\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b} = 0 - 5(\vec{a} \times \vec{b}) + 0 = -5(\vec{a} \times \vec{b})$.

$|-5(\vec{a} \times \vec{b})| = 5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 60$.

№4. $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(5; 2; 6)$ нүктелері $\triangle ABC$ үшбұрышының төбелері болып табылады. Осы үшбұрыштың ауданын есепте, $S_{\triangle ABC} = ?$ Ол үшін $\overrightarrow{AB} = ?$, $\overrightarrow{AC} = ?$

$\overrightarrow{AB} = \{(x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A)\} = \{(3 - 1), (0 - 2), (3 - 0)\} = \{2, -2, 3\}$,

$\overrightarrow{AC} = \{(x_C - x_A), (y_C - y_A), (z_C - z_A)\} = \{(5 - 1), (2 - 2), (6 - 0)\} = \{4, 0, 6\}$.

$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$ — $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы құрылған параллелограммның ауданы. Бұл жерде $S_{\triangle ABC} = \frac{S}{2}$ тең болады. $S = 2S_{\triangle ABC} = ?$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 0\vec{k} + 12\vec{j} + 8\vec{k} - 0\vec{i} - 12\vec{j} = -12\vec{i} + 8\vec{k} = \vec{c}(-12; 0; 8)$$

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\vec{c}| = \sqrt{144 + 0 + 64} = \sqrt{208} = 2\sqrt{54} = 4\sqrt{13}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{S}{2} = \frac{1}{2} 4\sqrt{13} = 2\sqrt{13}.$$

№5. $(\vec{a} + 3\vec{b})$ және $(3\vec{a} + \vec{b})$ векторлары арқылы құрылған параллелограммның ауданын есепте. Мұнда $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \widehat{\vec{a}\vec{b}} = 30^\circ$ беріген. Шешуі:

$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = 3(\vec{a} \times \vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{b}) - 9(\vec{a} \times \vec{b}) + 3(\vec{b} \times \vec{b}) = 0 - 8(\vec{a} \times \vec{b}) + 0 = -8(\vec{a} \times \vec{b})$, $S_{\text{парал.}} = ?$

$$S = |-8(\vec{a} \times \vec{b})| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(30^\circ) = 8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 48; \left(\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right)$$

Үй тапсырмалары

1) $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ берілген. Есепте: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ?$

2) Берілген $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңдар. $(\vec{a} \times \vec{b}) = ?$

3) $A(-1; 2; 3)$, $B(0; -3; 2)$, $C(3; -2; 1)$ нүктелері берілген. Бұлар $\triangle ABC$ үшбұрышын құрайды. Осы үшбұрыштың ауданын есептеңдер, $S_{\triangle ABC} = ?$